# Exercices sur la dualité

**Exercice 1.** Soit $f$ un endomorphisme d'un $K$-ev $E$. Montrer que:

$$\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f = \{0\} \Leftrightarrow \operatorname{Ker} f^2 = \operatorname{Ker} f$$

$$f^2(E) = f(E) \Leftrightarrow E = \operatorname{Im} f + \operatorname{Ker} f$$

**Exercice 2.** Soient trois $K$-ev $E$, $F$ et $G$, et des applications linéaires $u \in L(E, F)$ et $v \in L(E, G)$ telles que $\operatorname{Ker} u \subset \operatorname{Ker} v$. Montrer que: si $\operatorname{Im} u$ admet un supplémentaire alors $\exists w \in L(F, G)$ tel que $v = w \circ u$.

**Exercice 3.** Soient trois $K$-ev $E$, $F$ et $G$ avec $F$ de dimension finie, $u \in L(E, G)$ et $v \in L(F, G)$ tels que $\operatorname{Im} u \subset \operatorname{Im} v$. Montrer qu'il existe $w \in L(E, F)$ tel que $u = v \circ w$.

**Exercice 4.** Soit $E$ un $K$-ev de dimension pouvant être infinie, muni d'une forme bilinéaire symétrique $b$ non dégénérée, par laquelle on définit les orthogonaux dans $E$. Soit $F$ un sous-$K$-ev de $E$.

Montrer qu'on a

$$(E = F + F^{\perp}) \Rightarrow (F \cap F = \{0\})$$

et que la réciproque est vraie si $F$ est de dimension finie.

**Exercice 5.** (facile) Vérifier que la trace, application de $M_n(K)$ dans $K$, est une forme linéaire. Montrer que l'application

$$\begin{aligned} M_n(K)^2 &\to K \\ (A, B) &\mapsto tr(AB) \end{aligned}$$

est une forme bilinéaire symétrique. Notant $(m_{ij})$ la base canonique de $M_n(K)$, montrer que

$$(m_{ii})_i \cup (m_{ij} + m_{ji})_{i<j} \cup (m_{ij} + m_{ji})_{i<j}$$

est une base orthogonale de $M_n(K)$ pour cette forme bilinéaire. Déterminer sa signature.

L'exercice suivant est issu de www.math.uni-caen.fr/~cougnard qui contient un certain nombre d'exercices sur la dualité (qui utilisent parfois sans le dire les conséquences de Zorn, ce qu'on évite ici). Voir aussi par exemple son exercice 29, plus concret.

**Exercice 6.** Soit $E$ un $K$-ev éventuellement de dimension infinie, $(u_i)$ une famille d'éléments de $E^*$ et $u \in E^*$. Montrer que si $u$ est une combinaison linéaire des $u_i$ alors $\cap_{i \in I} \operatorname{Ker} u_i \subset \operatorname{Ker} u$. Supposons maintenant la famille $(u_i)$ de rang fini $p$, engendrée par $u_1, \cdots u_p$. Montrer que $\cap_{i=1}^{p} \operatorname{Ker} u_i = \cap_{i \in I} \operatorname{Ker} u_i$. En déduire qu'alors, si $\cap_{i \in I} \operatorname{Ker} u_i \subset \operatorname{Ker} u$, $u$ est combinaison linéaire des $u_i$. (On pourra considérér l'application $\varphi$ de $E$ dans $K^p$ définie par $\varphi(x) = (u_1(x), \cdots u_p(x))$).