NOM : **Prénom :** **No étudiant :**

MIAS2-: Algèbre linéaire Examen du 2/2/2004 durée: 3 heures

Examen d'algèbre, Mias 2.

Le premier exercice est indépendant des suivants; le troisième utilise les résultats du second.

1. Question de borne supérieure, *4 pts*

Calculer la valeur maximale de l'expression $x+y+z$ sur l'ensemble des $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ tels que

$$x^2+2y^2+3z^2\leq 1.$$

Préciser quels sont tous les triplets (x,y,z) pour lesquels cette valeur est atteinte.

Solution: Munissons $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire euclidien $(x,y,z)\cdot(x',y',z')=xx'+2yy'+3zz'$. On a alors $x+y+z=(x,y,z)\cdot u$ où $u=(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3})$. L'inégalité de Cauchy-schwarz donne $|x+y+z|\leq ||(x,y,z)||\cdot||u||=\sqrt{\frac{11}{6}(x^2+2y^2+3z^2)}$ (en effet $||u||^2=u\cdot u=1+\frac{2}{4}+\frac{3}{9}=\frac{11}{6}$), avec égalité pour (x,y,z) colinéaire à u. Pour avoir la valeur maximale de $x+y+z$ il faut de plus que $x^2+2y^2+3z^2$ ait sa valeur maximale 1, et que les vecteurs soient orientés dans le même sens (pour que $x+y+z$ soit positif). Donc la valeur maximale de $x+y+z$ est $\sqrt{\frac{11}{6}}$, et elle est atteinte uniquement pour le vecteur $\frac{u}{||u||}=\sqrt{\frac{6}{11}}(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3})$.

2. Endomorphismes antisymétriques d'un espace euclidien, *11 pts*

Dans la suite on suppose que f est un endomorphisme antisymétrique dans un espace euclidien E de dimension finie (autrement dit tel que pour tous $x,y\in E$ on a $x.f(y)=-f(x).y$ où . est le produit scalaire).

2.1. Montrer que les sous-espaces $\mathrm{Im}\, f$ et $\ker f$ sont orthogonaux.

Solution 1: Soient $x\in\mathrm{Im}\, f$, $y\in\ker f$. Il existe $z\in E$ tel que $x=f(z)$. Alors $x.y=f(z).y=-z.f(y)=0$ car $y\in\ker f$. Ainsi x et y sont orthogonaux pour tous $x\in\mathrm{Im}\, f$, $y\in\ker f$ donc Im f et $\ker f$ sont orthogonaux.

Solution 2: L'antisymétrie de f se réécrit en terme de l'adjoint f^* de f par $f^*=-f$. Or, $(\mathrm{Im}\, f)^\perp=\ker(f^*)=\ker(-f)=\ker f$ donc Im f et $\ker f$ sont orthogonaux.

2.2. Montrer que $\ker f^2=\ker f$ et Im $f^2=$ Im f.

Solution: Les inclusions $\ker f\subset\ker f^2$ et $\mathrm{Im}\, f^2\subset\mathrm{Im}\, f$ sont évidentes et il n'était donc pas nécessaire d'en écrire des démonstrations du moment qu'on le signalait. Pour montrer $\ker f^2\subset\ker f$ il y a deux méthodes possibles.

Méthode 1: Soit $x\in\ker f^2$. Alors par antisymétrie de f, $f(x).f(x)=-x.f^2(x)=-x.0=0$. Ainsi $||f(x)||=0$ donc $x\in\ker f$.

Méthode 2: Soit $x\in\ker f^2$. Alors $f(x)\in\mathrm{Im}\, f\cap\ker f=\{0\}$ comme sous-espaces orthogonaux dans un espace euclidien. Donc $f(x)=0$, ainsi $x\in\ker f$.

Pour montrer $\mathrm{Im}\, f\subset\mathrm{Im}\, f^2$ on utilise le fait que E est de dimension finie n (sinon le résultat est faux). Il y a là encore deux méthodes possibles (qui ont été trouvées par environ un étudiant chacune):

L'une est d'écrire $\dim\mathrm{Im}\, f^2=n-\dim\ker f^2=n-\dim\ker f=\dim\mathrm{Im}\, f$ et $\mathrm{Im}\, f^2\subset\mathrm{Im}\, f$ donc $\mathrm{Im}\, f^2=\mathrm{Im}\, f$.

L'autre, consiste pour tout $f(x)\in\mathrm{Im}\, f$ à décomposer grâce à $E=\mathrm{Im}\, f\oplus\ker f$ (qui résulte là encore de la dimension finie par $\mathrm{Im}\, f\cap\ker f=\{0\}$ et $\dim\mathrm{Im}\, f+\dim\ker f=n$), le vecteur x en $f(y)+z$ où $z\in\ker f$. Ainsi, $f(x)=f^2(y)+f(z)=f^2(y)\in\mathrm{Im}\, f^2$.

2.3. Montrer que pour tout $x\in E$, x est orthogonal à $f(x)$.

Solution: Par antisymétrie de f, on a pour tout $x\in E$, $x.f(x)=-f(x).x=-x.f(x)$, ainsi $2x.f(x)=0$ donc $x.f(x)=0$. Donc x est orthogonal à $f(x)$.

2.4. Si F est un sous-espace vectoriel de E stable par f, montrer que la restriction de f à F est antisymétrique, pour la structure euclidienne de F restriction de celle de E.

Solution: Comme F est stable par f, la restriction de f à F est un endomorphisme de l'espace euclidien F sous-espace de E. On vérifie son antisymétrie: comme la relation $x.f(y) = -f(x).y$ est vraie est vraie pour tous $x, y \in E$ et comme $F \subset E$, elle est vraie en particulier pour tous $x, y \in F$.

2.5. Montrer que f^2 est diagonalisable.

Solution: Montrons d'abord que f étant antisymétrique, l'endomorphisme f^2 est symétrique. Méthode 1: pour tous $x, y \in E, x.f^2(y) = -f(x).f(y) = +f^2(x).y$.

Méthode 2: l'adjoint de f^2 vérifie $(f^2)^* = (f^*)^2 = (-f)^2 = f^2$.

Puis, on sait que tout endomorphisme symétrique est diagonalisable. Donc f^2 est diagonalisable.

2.6. Montrer que tout sous-espace propre de f^2 est stable par f.

Solution: Soit x un vecteur propre de f^2 pour une valeur propre λ. Montrons que $f(x)$ appartient au même sous-espace propre:

$$f^2(f(x)) = f(f^2(x)) = f(\lambda x) = \lambda f(x)$$

CQFD.

(Sinon, n'y avait-il pas dans le cours un théorème disant que le noyau de tout polynôme d'endomorphisme est stable par cet endomorphisme ? c'est ici un cas particulier).

2.7. A l'aide de ce qui précède, montrer que tous les sous-espaces propres de f^2 pour des valeurs propres non nulles sont de dimension paire.

Solution: La restriction f_λ de f au sous-espace propre F_λ de f^2 pour la valeur propre λ est un isomorphisme car $f_\lambda^2 = \lambda \mathrm{Id}_{F_\lambda}$ est un isomorphisme (ou: f_λ injectif car... injectif). Or il est antisymétrique donc l'espace F_λ où il est défini est de dimension paire.

3. Etude d'une matrice, *6 pts*

Pour traiter certaines questions ci-dessous, vous serez amenés à utiliser des résultats de l'exercice précédent (préciser lesquels), même si vous ne les avez pas démontrés.

Dans une base orthonormée d'un espace euclidien de dimension 4, considérons l'endomorphisme f de matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 & -2 \\ -3 & 0 & 2 & -4 \\ -1 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

dont on remarque que

$$M \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

3.1. Donner une base orthogonale de l'image de f.

Solution: Comme M est antisymétrique, f est de rang pair. Ce rang est non nul car $M \neq 0$, et strictement inférieur à 4 car le noyau de M est non nul, donc il vaut deux. On pourrait prendre deux vecteurs colonnes de la matrice et les orthogonaliser par la méthode de Schmidt, mais il suffit de prendre une colonne, par exemple

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

et son image

$$y = f(x) = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ -5 \\ 10 \end{pmatrix}$$

qui est orthogonale à x d'après 2.3.

3.2. Calculer le polynôme minimal de f

Solution: Grâce à 2.1 l'espace $\mathbb{R}^4$ est somme directe de $\operatorname{Im} f$ et $\ker f$ donc un polynôme de f s'annule ssi ses restrictions à $\operatorname{Im} f$ et $\ker f$ sont nulles, donc le polynôme minimal de f est le ppcm de ceux de ses restrictions à $\operatorname{Im} f$ et $\ker f$. Pour $\ker f$ c'est X. Quant à $\operatorname{Im} f$ qui est de dimension 2, on sait d'après 2.7 qu'il est un sous-espace propre de f^2. Sa valeur propre λ vérifie $f^2(x) = \lambda x = f(y)$ d'où on tire $\lambda = -34$ en regardant la première coordonnée de $f(y)$. Le polynome minimal de f restreint à $\operatorname{Im} f$ est donc $X^2 + 34$. La réponse est donc $m_f = X(X^2 + 34) = X^3 + 34X$.

3.3. Calculer la matrice de la projection orthogonale sur Im f

Solution: L'endomorphisme f^2 étant diagonalisable de sous-espaces propres $\operatorname{Im} f$ et $\ker f$ pour les valeurs propres -34 et 0, et orthogonaux d'après 2.1, il est donc égal à $-34p$ où p est la projection orthogonale sur $\operatorname{Im} f$. Par conséquent, la matrice de p vaut

$$P = -\frac{1}{34}M^2 = \frac{1}{34}\begin{pmatrix} 14 & 10 & -6 & 12 \\ 10 & 29 & 3 & -6 \\ -6 & 3 & 5 & -10 \\ 12 & -6 & -10 & 20 \end{pmatrix}$$

Une autre méthode était d'effectuer, en notant X et Y les vecteurs colonnes représentant x et y, le calcul $P = \frac{1}{5}X\,{}^tX + \frac{1}{170}Y\,{}^tY$ (car x et y sont orthogonaux, $||x||^2 = 5$ et $||y||^2 = 170$).

3.4. Donner une base orthogonale du noyau de f (ou sinon au moins une base).

Solution: Prenons n'importe quel vecteur non nul, par exemple le premier vecteur de base e_1, il se projette par p parallèlement à $\ker f$ donc $e_1 - p(e_1) \in \ker f$. On trouve ainsi que $v = (10, -5, 3, -6) \in \ker f$. Comme il n'est pas lié à $u = (0, 0, 2, 1) \in \ker f$ et on sait que $\ker f$ est de dimension 2, les vecteurs u et v constituent une base de $\ker f$. Comme par hasard c'est une base orthogonale, sinon on l'aurait orthogonalisée facilement par la méthode de Schmidt.