Chap 1 :

Quelques préliminaires de logique élémentaire

Bibliographie : Pour plus de détails sur la question, voir par exemple :
R.Cori, D.Lascar : Logique mathématique

1 Symboles de base

Les symboles de base de notre langage formel sont
$\wedge$ et
$\neg$ non
$\exists$ il existe
$\in$ appartenance *(membership)*
$=$ égalité
(,) parenthèses
$v_0, v_1, v_2, ..., v_j, ...$ variables.

2 Expressions et formules

Définition 1 *: Une «expression» est une suite finie de symboles de base.*

Exemple 1 *:* $) = \exists\exists\neg \in \wedge)$

Intuitivement, on appellera formule toute expression ayant un sens.
Plus précisément, posons la définition suivante :

Définition 2 *: Une formule est une expression construite avec les règles suivantes :*
(1) pour tous indices i et j : $v_i \in v_j, v_i = v_j$ sont des formules.
(2) Si ϕ et ψ sont des formules, alors il en est de même de :
$(\phi) \wedge (\psi)$
$\neg(\phi)$
$\exists v_i(\phi)$ *pour tout indice i.*

3 Quelques simplifications usuelles

(1) $\forall v_i(\phi)$ est l'abréviation pour $\neg\left(\exists v_i\left(\neg(\phi)\right)\right)$
(2) $(\phi) \vee (\psi)$ est l'abréviation pour $\neg\left((\neg(\phi)) \wedge (\neg(\psi))\right)$
(3) $(\phi) \Rightarrow (\psi)$ est l'abréviation pour $(\neg(\phi)) \vee (\psi)$
(4) $(\phi) \Longleftrightarrow (\psi)$ est l'abréviation pour $((\phi) \Rightarrow (\psi)) \wedge ((\psi) \Rightarrow (\phi))$
(5) Les parenthèses sont enlevées quand leur place est claire d'après le contexte.

(6) $v_i \neq v_j$ est l'abréviation pour $\neg(v_i = v_j)$
$v_i \notin v_j$ est l'abréviation pour $\neg(v_i \in v_j)$
(7) Les lettres usuelles $x, y, z, \alpha, \beta, \gamma, \aleph$ etc. remplacent généralement les variables $v_0, v_1, ...$

4 Variables liées,variables libres

Définition 3 *: Une sous-formule de ϕ est une suite consécutive de symboles de ϕ qui constitue une formule.*

Exemple 2 *: $\phi : (\exists v_0(v_0 \in v_1)) \wedge (\exists v_1(v_2 \in v_1))$*
Les sous-formules de ϕ sont :
$v_0 \in v_1$
$\exists v_0(v_0 \in v_1)$
$v_2 \in v_1$
$\exists v_1(v_2 \in v_1)$
ϕ elle-même

Remarque 1 *: Il n'existe pas de formule «vide».*

Définition 4 *: Le «champ d'action» (scope) de l'apparition d'un quantificateur $\exists v_i$ est l'unique sous-formule commençant par $\exists v_i$.*

Exemple 3 *: Le «champ d'action» de $\exists v_0$ dans ϕ est «$\exists v_0(v_0 \in v_1)$»*

Définition 5 *: Une apparition (ou occurrence) d'une variable dans une formule est dite «liée» (bound) ssi elle appartient au champ d'action d'un quantificateur agissant sur cette variable, et «libre» (free) dans le cas contraire.*

Exemple 4 *: La $1^{ère}$ apparition de v_0 dans ϕ est liée.*
La $2^{ème}$ apparition de v_0 dans ϕ est liée.
La $1^{ère}$ apparition de v_1 dans ϕ est libre.
La $2^{ème}$ apparition de v_1 dans ϕ est liée.
La $3^{ème}$ apparition de v_1 dans ϕ est liée.
L'apparition de v_2 est libre.

Remarque 2 *: Intuitivement, une formule exprime une propriété de ses variables libres.*
Les variables liées, appelées aussi variables muettes, sont là uniquement pour exprimer des constats d'existence, et peuvent être remplacées par d'autres variables liées.

Exemple 5 *: $(\phi) \Longleftrightarrow (\psi)$: «$(\exists x(x \in v_1)) \wedge (\exists y(v_2 \in y))$*

En fait, c'est exactement la même chose que $\int_0^{\pi/4} \sin(3x+t)dt$:
x variable libre, t variable muette
et, de plus, $\int_0^{\pi/4} \sin(3x+t)dt = \int_0^{\pi/4} \sin(3x+u)du$

5 Déduction formelle

Définition 6 *: Une «formule close» ou un «énoncé» est une formule sans variable libre.*

[Intuitivement, une formule close exprime une assertion qui est soit vraie, soit fausse].

Exemple 6 *: ZFC est un certain ensemble de formules closes (sentences).*

Définition 7 *: Soit S un ensemble de formules closes, et ϕ une formule close.*
On dit que $S \vdash \phi$ (S «infère» ϕ) ssi ϕ est une «déduction formelle» de S,
i.e. s'il existe une suite finie $\phi_1, ..., \phi_n$ de formules telle que
$\rightarrow$ ϕ_n est ϕ
$\rightarrow$ $\forall i, \phi_i$ est dans S
ou ϕ_i est un axiome logique
ou ϕ_i dérive de $S, \phi_1, ..., \phi_{i-1}$ par certaines règles d'inférence.

Remarque 3 ***fondamentale :*** *Le fait que les déductions formelles à partir de S soient des objets finis signifie qu'elles ne peuvent faire appel qu'à un nombre fini de formules closes de S, même si S est un ensemble infini de formules closes.*

D'où les 2 théorèmes suivants (dans la pratique,on prendra $S = ZFC$, qui est un ensemble infini d'axiomes, donc de formules closes).

Théorème 1 *: Si $S \vdash \phi$, alors il existe un ensemble fini $S_0 \subset S$ tel que $S_0 \vdash \phi$*

[pour démontrer le théorème de Fermat,on n'a fait appel qu'à un nombre fini d'axiomes de ZFC].

Théorème 2 *: Si S est inconsistant, alors il existe un ensemble fini $S_0 \subset S$ tel que S_0 soit inconsistant.*

[Si on s'aperçoit dans 14000 ans que ZFC est contradictoire, on n'aura eu le temps d'utiliser qu'un nombre fini d'axiomes de ZFC pour mettre en évidence la contradiction].